DS de mathématiques n°6

Arithmétique, Structures algébriques, Matrices, Systèmes linéaires

Durée : **4h**. Calculatrices non autorisées.
La clarté du raisonnement et la lisibilité de la copie pourront faire varier la note de ± 1 point.
Les exercices sont de difficulté (plus ou moins) croissante et les premiers exercices rapportent plus de points (à difficulté égale) que les suivants.

Exercice 1 : Un système linéaire

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. En utilisant la méthode du pivot et en discutant selon les valeurs de λ, résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + y + \lambda z = \lambda \\ x + (2-\lambda)y + z = 1 \\ \lambda x + y + z = 2 - \lambda \end{cases}$$

Exercice 2 : Commutant des matrices diagonales

Soit $n \geq 2$ un entier et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On définit le *commutant* de B comme étant l'ensemble des matrices qui commutent avec B, c'est-à-dire :

$$\mathrm{Com}(B) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid MB = BM\}$$

1) Montrer que $\mathrm{Com}(B)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), +)$.

Dans la suite, on considère $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ des nombres complexes et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$, i.e. D est la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec pour diagonale les coefficients $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$.

2) On suppose que $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n$. Que vaut $\mathrm{Com}(D)$?

3) On suppose dans toute cette question que $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont *distincts* deux à deux. Soit M une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- **a)** On pose $L = MD$ et $R = DM$. Pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, exprimer L_{ij} et R_{ij} en fonction des coefficients de M et de D.
- **b)** En déduire que $\mathrm{Com}(D) = D_n(\mathbb{C})$, où $D_n(\mathbb{C})$ est l'ensemble des matrices diagonales.

4) Déduire de la question précédente qu'il existe exactement 125 matrices M de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$, que l'on précisera, telles que :

$$M^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 32 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 : Anneau de Boole

On considère un anneau $(A, +, \cdot)$, dont on note 0 et 1 les éléments neutres respectifs pour les lois + et $\cdot$.
On suppose que A vérifie la propriété suivante (on dit que A est un anneau de Boole) :

$$\forall a \in A \quad a^2 = a$$

1) En calculant $(a+b)(a+b)$, montrer que pour tout $a, b \in A$, $ab = -ba$.

2) Montrer que pour tout $a \in A$, $a = -a$.

3) En déduire que A est un anneau commutatif.

4) Montrer que tous les éléments de A sauf 0 et 1 sont des diviseurs de zéro. On rappelle que $a \in A \setminus \{0\}$ est un diviseur de zéro (pour la loi $\cdot$) s'il existe $b \in A \setminus \{0\}$ tel que $ab = 0$.

5) On considère la relation $\leq$ sur A définie par : $a \leq b \iff ab = a$.

a) Montrer que $\leq$ est une relation d'ordre sur A.

b) Montrer que pour tous $a, b \in A$, on a $ab \leq a$ et $ab \leq b$.

c) Montrer que 0 est le plus petit élément de A (pour $\leq$). Quel est le plus grand élément de A ?

Exercice 4 : Triplets pythagoriciens

On appelle triplet pythagoricien tout triplet (x, y, z) d'entiers dans $\mathbb{N}^*$ tel que

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Le but de cet exercice est de déterminer tous les triplets pythagoriciens. On raisonne par analyse-synthèse en se donnant un triplet pythagoricien (x, y, z). On note $d = x \wedge y$.

1) Montrer que pour tous entiers a et b, on a $b \mid a$ si et seulement si $b^2 \mid a^2$.

2) En déduire que d divise z.

Dans la suite, on pose $x' = \dfrac{x}{d}$, $y' = \dfrac{y}{d}$ et $z' = \dfrac{z}{d}$. Par la question précédente, x', y' et z' sont tous dans $\mathbb{N}^*$.

3) Montrer que (x', y', z') est un triplet pythagoricien.

4) Que peut-on dire de $x' \wedge y'$? Montrer également que $x' \wedge z' = 1$ et $y' \wedge z' = 1$.

5) Étant donné a et b sont deux entiers impairs, montrer que $a^2 + b^2 - 2$ est divisible par 4.

6) En déduire que x' et y' ne peuvent pas être tous les deux impairs.

7) Montrer que x' et y' sont de parités différentes. Quelle est la parité de z' ?

On suppose, dans la suite, que x' est pair et que y' est impair.

8) On pose $a = \dfrac{x'}{2} \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe deux entiers strictement positifs b et c tels que $b + c = z'$ et $b - c = y'$. En déduire que $a^2 = bc$.

9) Montrer que b et c sont premiers entre eux. En déduire qu'il existe deux entiers naturels u et v tels que $b = u^2$ et $c = v^2$.

10) En déduire que $x = 2duv$, $y = d(u^2 - v^2)$ et $z = d(u^2 + v^2)$.

11) Conclure en déterminant tous les triplets pythagoriciens.

Exercice 5 : Arithmétique sur le groupe $\mathbb{U}_n$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que $\mathbb{U}_n$ est l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité, défini par $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C}^* \mid z^n = 1\}$. On admet que $(\mathbb{U}_n, \times)$ est un groupe abélien. Pour tout $\omega \in \mathbb{U}_n$, on définit l'ensemble dit "engendré par ω" par :

$$G_\omega = \{\omega^q \mid q \in \mathbb{N}^*\} = \left\{\omega, \omega^2, \omega^3, \cdots\right\}$$

1) Montrer que $G_\omega \subset \mathbb{U}_n$.

2) Dans cette question, on suppose $n = 6$ et on pose $u = e^{\frac{2i\pi}{6}}$. Expliciter l'ensemble $\mathbb{U}_6$ en fonction de u, puis expliciter (sans justification) les ensembles G_u, G_{u^2}, G_{u^3} et G_{u^5} en fonction de u. Combien d'éléments possèdent ces ensembles ?

3) Montrer que $(G_\omega, \times)$ est un groupe.

4) Dans cette question, on fixe $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\omega = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ et on définit l'ordre de ω comme étant le plus petit entier $p \geq 1$ tel que $\omega^p = 1$.

- **a)** Montrer que pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, on a $n \mid kq$ si et seulement si q est un multiple de l'entier $n' = \dfrac{n}{k \wedge n}$.
- **b)** Dans cette question, on suppose $n = 6$. Donner l'ordre de chaque élément de $\mathbb{U}_6$.
- **c)** Montrer que l'ordre de ω est $\dfrac{n}{k \wedge n}$.
- **d)** Montrer que si $k \wedge n = 1$, alors $G_\omega = \mathbb{U}_n$.

5) On pose $\mathbb{U}_\infty = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathbb{U}_n$. Montrer que $(\mathbb{U}_\infty, \times)$ est un groupe, et que $\mathbb{U}_\infty \neq \mathbb{U}$.

Contrepèterie : "Le prof de maths a montré Bézout."